

УДК 621.91.01/02

# ВЗАИМОСВЯЗЬ СКОРОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ИНСТРУМЕНТА И ЗАГОТОВКИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ

д-р техн. наук, проф. Н.Н. ПОПОК;  
И.П. КУНЦЕВИЧ; Р.С. ХМЕЛЬНИЦКИЙ; В.С. АНИСИМОВ; Г.И. ГВОЗДЬ  
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается математическая модель, описывающая взаимосвязь скоростей вращения инструмента и заготовки при механической обработке сферических поверхностей деталей. Представлены формулы для расчета скоростей вращения инструмента и заготовки с учетом времени контакта. Полученные зависимости позволяют рассчитать точные значения скоростей при изменении параметров обработки и при необходимости согласовать их между собой.

**Ключевые слова:** сферическая поверхность, обработка сферической поверхности, скорость вращения инструмента, скорость вращения заготовки, математическая модель, взаимосвязь движения заготовки и инструмента.

**Введение.** Механическая обработка сферических поверхностей деталей резцом или фрезой имеет такую особенность, как постоянно изменяющиеся направления и величины скоростей резания и подачи. Данная особенность существенно влияет на стабильность процесса резания. При обработке на высоких скоростях резания важно знать точные значения скоростей главного движения и подачи, что позволит управлять процессом резания, в частности с использованием систем ЧПУ, и получать более качественные и точные поверхности сфер.

При обработке сферической поверхности фрезерованием (рис. 1) скорость главного движения в любой точке сферы изменяется по направлению и остается постоянной по величине. Скорость подачи при этом зависит от ряда параметров инструмента и заготовки. Ранее авторами [1; 2] проведено моделирование процесса фрезерования сферических поверхностей деталей, например, шаровых пальцев автомобилей и получены формулы для расчета скорости подачи инструмента исходя из заданной шероховатости поверхности  $R_z$ , радиусов сфер  $R_{cf}$  и лезвия инструмента  $r$  в следующем виде:

$$S_o = \sqrt{\frac{-4R_z^2 a^2 - 1 + \sqrt{(4R_z^2 a^2 - 1)^2 + 64a^2 r^2}}{2a^2}}, \quad (1)$$

где  $a = \frac{2r + R_{cf}}{2 \cdot R_{cf} \cdot R_z}$  – постоянный коэффициент.

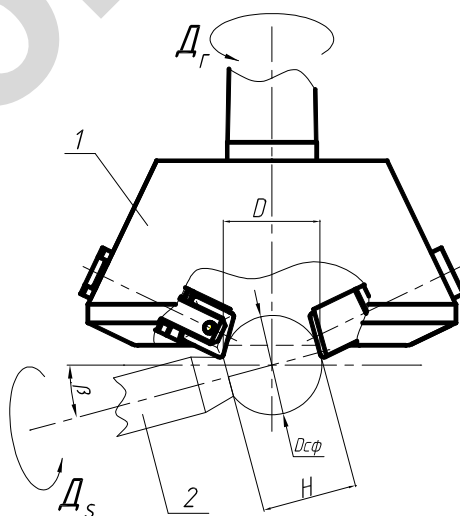
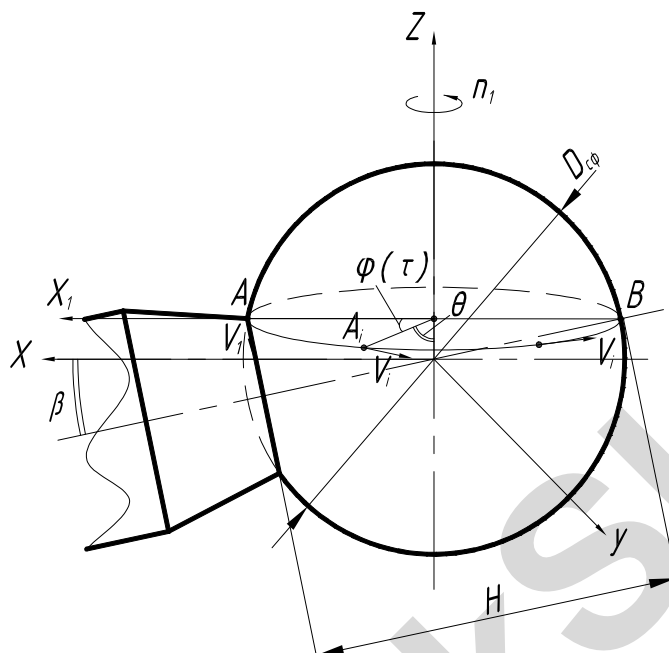


Рисунок 1. – Схема охватывающего фрезерования сферической поверхности детали

Выведем формулы для расчета скоростей вращения заготовки и инструмента с целью соблюдения условия их согласования, обеспечивающего высокое качество получаемой поверхности.

**Скорость движения инструмента.** Рассмотрим движение инструмента по поверхности сферической заготовки, при этом допустим, что инструмент имеет одно лезвие и заготовка не вращается (рис. 2). Установим зависимость скорости движения инструмента  $V_1$  от времени  $\tau$ .



**Рисунок 2. – Схема для определения скорости вращения инструмента**

Если не учитывать вращение заготовки, то инструмент равномерно, а значит, с постоянной по модулю скоростью  $V_1$  вращается по дуге окружности диаметром  $D = \sqrt{D_{cf} H}$ .

В каждой точке  $A_i$  дуги окружности вращения инструмента вектор скорости  $\vec{V}_i$  направлен по касательной к этой окружности. Скорость подачи инструмента не учитывается.

Чтобы вывести формулу скорости движения инструмента, можно воспользоваться одним из следующих способов.

1. Как известно, формула скорости точки, которая движется по окружности, имеет вид:

$$V = 2\pi nR,$$

где  $R$  – радиус окружности;  $n$  – частота вращения.

В нашем случае  $R = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{D_{сф} H}}{2}$ , если  $n = n_1$ .

Тогда

$$V_1 = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot \frac{\sqrt{D_{c\phi} H}}{2} = \pi \cdot n_1 \cdot \sqrt{D_{c\phi} \cdot H} .$$

Значит, скорость вращения инструмента  $V_1$  не зависит от времени  $\tau$  и находится по формуле

$$V_1(\tau) = \pi \cdot n_1 \cdot \sqrt{D_{c\phi} \cdot H}. \quad (2)$$

2. Рассмотрим движение точки  $A_i$  по поверхности заготовки в сферической системе координат  $OR\varphi\theta$  (см. рис. 2), где  $R = const$ ,  $\theta = const$ ,  $\varphi(\tau) = 2\pi i \tau$ ,  $\tau$  – время.

$$\begin{cases} x = R_{c\phi} \cdot \sin \theta \cos \varphi(\tau); \\ y = R_{c\phi} \cdot \sin \theta \sin \varphi(\tau); \\ z = R_{c\phi} \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

Учитывая то, что  $\theta = 90^\circ - \beta$ ,  $R_{c\phi} = \frac{D_{c\phi}}{2}$ , получаем следующие параметрические уравнения движения точки  $A_i$  по сферической поверхности относительно параметра (неизвестной величины)  $\tau$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} D_{c\phi} \cdot \cos \beta \cos(2\pi n_1 \tau); \\ y = \frac{1}{2} D_{c\phi} \cdot \cos \beta \sin(2\pi n_1 \tau); \\ z = \frac{1}{2} D_{c\phi} \cdot \sin \beta. \end{cases}$$

Скорость  $V_1$  находится по формуле

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2},$$

где  $V_{1x} = x'_t = \frac{dx}{d\tau}$ ;  $V_{1y} = y'_t = \frac{dy}{d\tau}$ ;  $V_{1z} = z'_t = \frac{dz}{d\tau}$ .

Находим  $V_{1x}, V_{1y}, V_{1z}$ :

$$\begin{aligned} V_{1x} &= -\frac{1}{2} D_{c\phi} \cdot \cos \beta \sin(2\pi n_1 \tau) \cdot 2\pi n_1 = -\pi n_1 D_{c\phi} \cdot \cos \beta \sin(2\pi n_1 \tau); \\ V_{1y} &= \frac{1}{2} D_{c\phi} \cdot \cos \beta \cos(2\pi n_1 \tau) \cdot 2\pi n_1 = \pi n_1 D_{c\phi} \cdot \cos \beta \cos(2\pi n_1 \tau); \\ V_{1z} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\pi^2 n_1^2 D_{c\phi}^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin^2(2\pi n_1 \tau) + \pi^2 n_1^2 D_{c\phi}^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2(2\pi n_1 \tau) + 0}; \\ V_1 &= \sqrt{\pi^2 n_1^2 D_{c\phi}^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot (\sin^2(2\pi n_1 \tau) + \cos^2(2\pi n_1 \tau))} \\ \sin^2(2\pi n_1 \tau) + \cos^2(2\pi n_1 \tau) &= 1; \\ V_1 &= \sqrt{\pi^2 n_1^2 D_{c\phi}^2 \cdot \cos^2 \beta} = \pi n_1 D_{c\phi} \cdot \cos \beta. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\beta = \arccos \sqrt{\frac{H}{D_{c\phi}}}$ , получаем:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi n_1 D_{c\phi} \cdot \cos \left( \arccos \sqrt{\frac{H}{D_{c\phi}}} \right), \\ V_1 &= \pi n_1 D_{c\phi} \cdot \sqrt{\frac{H}{D_{c\phi}}}, \end{aligned}$$

или

$$V_1 = \pi n_1 \cdot \sqrt{D_{c\phi} H}. \quad (3)$$

При использовании первого и второго способов получены одинаковые выражения (2) и (3).

**Частота вращения заготовки.** Рассмотрим случай, когда сферическая поверхность заготовки обрабатывается одним лезвием, и установим зависимость частоты вращения заготовки  $n_2$  от частоты вращения инструмента  $n_1$  (рис. 3).

Пусть  $\tau$  – время, за которое заготовка делает один оборот с частотой  $n_2$ .

Тогда  $\tau = \frac{1}{n_2}$ .

За это же время  $\tau$  инструмент делает  $k$  оборотов, каждый из которых с частотой  $n_1$ , то есть  $\tau = \frac{k}{n_1}$ .

Тогда  $\frac{1}{n_2} = \frac{k}{n_1}$ , следовательно

$$n_2 = \frac{n_1}{k}. \quad (4)$$

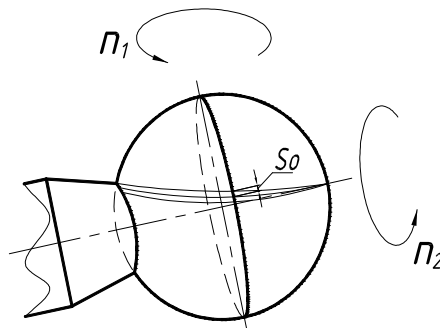


Рисунок 3. – Схема к расчету соотношения частот вращения инструмента  $n_1$  и заготовки  $n_2$

Необходимо найти число оборотов инструмента. За один оборот инструмент перемещается по поверхности заготовки на величину подачи  $S_0$ . Тогда за  $k$  оборотов инструмент проходит по линии, приближенно равной длине большой окружности сферы.

Пусть  $L$  – длина большой окружности сферы заготовки. Тогда

$$k = \frac{L}{S_0} = \frac{2\pi R_{сф}}{S_0} = \frac{\pi D_{сф}}{S_0}.$$

Подставив эту формулу в формулу (4), получаем:

$$n_2 = \frac{n_1 S_0}{\pi D_{сф}},$$

где  $n_1$  – частота вращения инструмента;  $S_0$  – подача инструмента;  $D_{сф}$  – диаметр сферической поверхности.

Данная формула может быть преобразована с учетом формулы (1) к следующему виду:

$$n_2 = \frac{n_1 \sqrt{\frac{-4Rz^2 a^2 - 1 + \sqrt{(4Rz^2 a^2 - 1)^2 + 64r^2 a^2}}{2a^2}}}{\pi D_{сф}}. \quad (5)$$

**Взаимосвязь движений заготовки и инструмента.** Рассмотрим движение точки по дуге окружности вращения заготовки с частотой  $n_2$  (рис. 4).

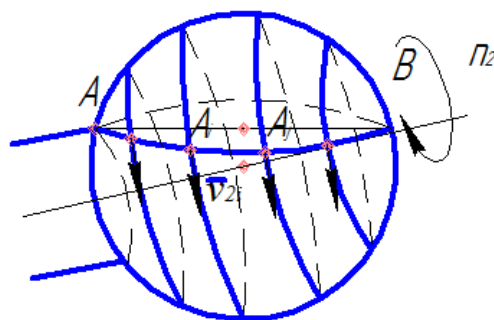


Рисунок 4. – Схема для определения скорости вращения заготовки

Инструмент равномерно с постоянной по модулю скоростью  $V_1$  вращается с частотой  $n_1$  в одной и той же плоскости. Пусть  $A_i$  – точка, которая движется по дуге окружности вращения инструмента.

Пусть  $V_{2i}$  – скорость движения точки  $A_i$ , если рассматривать вращение заготовки с частотой  $n_2$ . Скорость  $V_{2i}$  в точке  $A_i$  направлена по касательной к окружности текущего радиуса  $r_i$ .

Установим зависимость скорости движения заготовки  $V_{2i}$  от времени  $\tau$ . Если быть точнее, то требуется установить зависимость скорости движения  $V_{2i}$  точки  $A_i$ , с учетом вращения заготовки с частотой  $n_2$ .

Как видим из рисунка 4, точка  $A_i$  располагается на пересечении двух окружностей: окружности диаметром  $D = \sqrt{D_{cf} \cdot H}$ , по которой вращается инструмент, и окружности радиусом  $r_i$ , которая параллельна окружности закрепления заготовки, проходящей через точку  $A$ .

При вращении заготовки точка  $A_i$  в разный момент времени оказывается на окружности с другим значением радиуса  $r_i$ . Это свидетельствует о том, что величина  $r_i$  изменяется со временем, т.е.  $r_i = r_i(\tau)$ . А значит и скорость движения заготовки  $V_{2i}$  изменяется со временем, т.е.  $V_{2i} = V_{2i}(\tau)$ .

Надо отметить, что изменение  $r_i(\tau)$  и  $V_{2i}(\tau)$  происходит периодически, т.е. от точки  $A$  до какого-то момента времени  $r_i(\tau)$  и  $V_{2i}(\tau)$  возрастает, а затем начинает убывать, и в точке  $B$   $r_i(\tau) = 0$  и  $V_{2i}(\tau) = 0$ . Далее от точки  $B$  до точки  $A$  процесс происходит в обратном порядке.

В качестве исходной для нахождения скорости  $V_{2i}$  примем следующую формулу:

$$V_{2i} = 2\pi n_2 \cdot r_i,$$

где  $n_2$  – частота вращения заготовки;  $r_i$  – текущий радиус окружности.

Создадим плоский рисунок, спроецировав заготовку на плоскость  $OXZ$  (рис. 5).

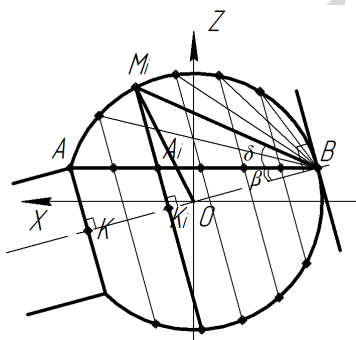


Рисунок 5. – Проекция заготовки на плоскость  $OXZ$

Требуется:

1) найти скорость движения заготовки в начальный момент времени  $\tau = 0$ , т.е. в точке  $A$ ;  
2) установить зависимость текущего радиуса окружности  $r_i = r_i(\tau)$  от времени, при этом необходимо ввести дополнительный угол  $\delta = \delta(\tau)$ ;

3) установить зависимость скорости движения заготовки  $V_{2i}$  от времени, т.е.  $V_{2i} = V_{2i}(\tau)$ .

1. В точке  $A$  вектор скорости  $\vec{V}_{2i}$  направлен по касательной к окружности  $r_0 = AK$ ,  $\Delta AKB$  – прямоугольный. Следовательно,  $AK = AB \cdot \sin \beta = \sqrt{D_{cf} \cdot H} \cdot \sin \beta$ .

Найдем  $\sin \beta$ :

$$\sin \beta = \sin \left( \arccos \cdot \sqrt{\frac{H}{D_{cf}}} \right) = \sqrt{1 - \cos^2 \left( \arccos \cdot \sqrt{\frac{H}{D_{cf}}} \right)} = \sqrt{1 - \frac{H}{D_{cf}}} = \frac{\sqrt{D_{cf} - H}}{\sqrt{D_{cf}}}.$$

Тогда

$$r_0 = AK = \sqrt{D_{cf} \cdot H} \cdot \frac{\sqrt{D_{cf} - H}}{\sqrt{D_{cf}}} = \sqrt{H \cdot (D_{cf} - H)}.$$

Далее находим скорость  $V_{2A}$ :

$$V_{2A} = 2 \cdot \pi \cdot n_2 \cdot \sqrt{H \cdot (D_{cf} - H)},$$

или

$$V_{2A} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot S_0}{\pi \cdot D_{cf}} \cdot \sqrt{H \cdot (D_{cf} - H)}.$$

Далее, проводя преобразование, получаем, что в точке  $A$  скорость  $V_{2A}$  находится по следующей формуле:

$$V_{2A} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot S_0}{D_{cf}} \cdot \sqrt{H \cdot (D_{cf} - H)}. \quad (6)$$

2. Пусть через некоторый промежуток времени точка на поверхности заготовки окажется в точке  $A_i$ , лежащей на дуге окружности вращения инструмента и на дуге окружности радиуса  $r_i = M_i \cdot K_i$  (см. рис. 5).

$\Delta M_i K_i B$  – прямоугольный,  $\angle K_i B M_i = \beta + \delta$ , где  $\delta = \delta(\tau)$  – угол, который изменяется со временем.

Рассмотрим  $\Delta O M_i B$  – равнобедренный, так как  $O M_i = O B = R_{cf} = \frac{D_{cf}}{2}$ .

Тогда  $\Delta O M_i B = \angle O B M_i = \beta + \delta$ , следовательно,  $M_i O B = 180^\circ - 2 \cdot (\beta + \delta)$ .

Из прямоугольного  $\Delta K_i M_i O$  имеем  $M_i K_i = O M_i \cdot \sin \angle M_i O K_i$ .

$\angle M_i O K_i = 180^\circ - \angle M_i O B = 2 \cdot (\beta + \delta)$ .

Значит,  $r_i = M_i K_i = O M_i \cdot \sin(2 \cdot (\beta + \delta))$ , или  $r_i = \frac{D_{cf}}{2} \cdot \sin(2 \cdot (\beta + \delta))$ .

Предположим, что  $\delta(\tau)$  есть линейная функция от переменной величины  $\tau$  вида

$$\delta(\tau) = m \cdot n_1 \cdot \tau,$$

где  $m$  – коэффициент пропорциональности;  $n_1$  – частота вращения инструмента.

По аналогии в сферической системе координат  $\varphi = \varphi(\tau) = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot \tau$ .

Чтобы найти коэффициент  $m$ , воспользуемся двумя крайними предельными положениями точки, т.е. рассмотрим точки  $A$  и  $B$ . При движении от точки  $A$  до точки  $B$  инструмент делает пол-оборота.

В точке  $A$ :  $\tau = 0$ ,  $\delta(0) = 0$ .

В точке  $B$ :  $\tau = \frac{1}{2 \cdot n_1}$ ,  $\delta \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot n_1} \right) = \frac{\pi}{2} - \beta$  (см. рис. 5).

Далее,  $m \cdot n_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot n_1} = \frac{\pi}{2} - \beta$ , следовательно,  $m = \pi - 2 \cdot \beta$ .

Таким образом, при  $\delta = \delta(\tau)$  получаем следующую формулу:

$$r_i = \frac{D_{cf}}{2} \cdot \sin(2 \cdot (\beta + \delta)). \quad (7)$$

Тогда

$$r_i = r_i(\tau) = r_i(D_{cf}; n_1; \beta; \tau) = \frac{1}{2} \cdot D_{cf} \cdot \sin(2 \cdot \beta + 2 \cdot (\pi - 2 \cdot \beta) \cdot n_1 \cdot \tau). \quad (8)$$

3. Находим скорость заготовки  $V_{2i}$ :

$$V_{2i}(\tau) = 2 \cdot \pi \cdot n_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot D_{cf} \cdot \sin(2 \cdot \beta + 2 \cdot (\pi - 2 \cdot \beta) \cdot n_1 \cdot \tau).$$

Или с учетом  $n_2 = \frac{n_1 \cdot S_0}{\pi \cdot D_{cf}}$  получаем:

$$V_{2i}(\tau) = \pi \cdot \frac{n_1 \cdot S_0}{\pi \cdot D_{cf}} \cdot D_{cf} \cdot \sin(2 \cdot \beta + 2(\pi - 2 \cdot \beta) \cdot n_1 \cdot \tau),$$

$$V_{2i}(\tau) = V_{2i}(n_1; S_0; \tau) = n_1 \cdot S_0 \cdot \sin(2 \cdot \beta + 2(\pi - 2 \cdot \beta) \cdot n_1 \cdot \tau), \quad (9)$$

где  $n_1$  – частота вращения инструмента;  $S_0$  – подача инструмента;  $\beta$  – угол наклона оси заготовки.

Чтобы показать связь скорости вращения инструмента  $V_1$  и скорости вращения заготовки  $V_{2i}$ , формулу (9) можно записать в следующем виде:

$$V_{2i}(\tau) = V_{2i}(D_{cf}; H; V_1; S_o; \tau) = \frac{V_1 \cdot S_o}{\pi \cdot \sqrt{D_{cf} \cdot H}} \cdot \sin(2 \cdot \beta + 2(\pi - 2 \cdot \beta) \cdot n_1 \cdot \tau). \quad (10)$$

Проверим, подходит ли формула (10) для вычисления скорости заготовки в крайних положениях, т.е. в точке  $A$  или точке  $B$ :

1. В точке  $A$ :  $\tau = 0$ , следовательно

$$\begin{aligned} V_{2i} &= n_1 \cdot S_o \cdot \sin 2 \cdot \beta = n_1 \cdot S_o \cdot 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = n_1 \cdot S_o \cdot 2 \cdot \sin \left( \arccos \sqrt{\frac{H}{D_{cf}}} \right) \cdot \cos \left( \arccos \sqrt{\frac{H}{D_{cf}}} \right) = \\ &= 2 \cdot n_1 \cdot S_o \cdot \frac{\sqrt{D_{cf} - H}}{\sqrt{D_{cf}}} \cdot \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{D_{cf}}} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot S_o}{D_{cf}} \cdot \sqrt{H \cdot (D_{cf} - H)}. \end{aligned}$$

Итак,  $V_{2A} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot S_o}{D_{cf}} \cdot \sqrt{H \cdot (D_{cf} - H)}$ , т.е. получаем ту же формулу, что получили при решении геометрической задачи.

2. В точке  $B$ :  $\tau = \frac{1}{2 \cdot n_1}$  (инструмент делает пол-оборота).

$$\text{Тогда } V_{2B} = n_1 \cdot S_o \cdot \sin(2 \cdot \beta + 2 \cdot (\pi - 2 \cdot \beta) \cdot n_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot n_1}) = n_1 \cdot S_o \cdot \sin(2 \cdot \beta + \pi - 2 \cdot \beta) = n_1 \cdot S_o \cdot \sin \pi = 0.$$

Итак,  $V_{2B} = 0$ , что подтверждается геометрически.

В полученных формулах переменная величина  $\tau$  отсутствует или принимает нулевое значение. Значит, скорость движения инструмента не зависит от времени  $\tau$ . Модуль скорости – это постоянная величина в определенном эксперименте. В каждой точке дуги окружности вращения инструмента вектор скорости направлен по касательной. При вращении инструмента вектор скорости изменяет только направление. Если в формулу (10) подставить значение  $S_o$  по формуле (1), то получим выражение, позволяющее рассчитать скорость вращения заготовки или инструмента для конкретных значений диаметра сферы, неровностей ее поверхности, радиуса при вершине лезвия, угла наклона оси заготовки и времени обработки. А это означает то, что появляется возможность с помощью системы ЧПУ станка управлять скоростями движения инструмента и заготовки в их взаимосвязи для обеспечения требуемых параметров обрабатываемой поверхности детали.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Выбор подачи при обработке вращающимся режущим инструментом сферических поверхностей деталей / Н.Н. Попок [и др.] // Перспективные направления развития технологии машиностроения и металлообработки : тез. докл. 32-й Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 7–8 апр. 2016 г. – Минск : Бизнесофсет, 2016. – С. 126–128.
2. Моделирование влияния шероховатости сферической поверхности детали на выбор скорости подачи вращающегося режущего инструмента / Н.Н. Попок [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2016. – № 3. – С. 28–37.

Поступила 01.08.2016

#### THE RELATIONSHIP OF ROTATION SPEEDS OF THE TOOL AND WORKPIECE WHEN MACHINING SPHERICAL SURFACES

N. POPOK, I. KUNCEVICH, R. HMELNICKY, V. ANISIMOV, G. GVOZDZ

*Having considered the conclusions of the formulas for the calculation of the tool and workpiece speeds, taking into account their contact time. Obtained dependencies, allow us to calculate the exact speed values when changing the processing parameters and, if necessary, to coordinate them one with another.*

**Keywords:** spherical surface, treatment of the spherical surface, the tool rotation speed, the workpiece rotation speed, mathematical model, the dependence of movement of tool and workpiece.